$2^{\underline{o}}$ Esonero e $1^{\underline{o}}$ Recupero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti)
Ingegneria Elettronica; 2–12–06 Compito A

Gli studenti che sostengono il secondo esonero svolgano solamente gli esercizi 4) e 5).

Problema 1 (7) Sia V la porzione di spazio interna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$ e compresa fra le due superfici $z=x+2y$ e $z=1+x^2+4y^2$. Si calcoli il volume di V.

Problema 2 (7) Si calcoli l'area della superficie laterale S contornante V.

Problema 3 (7) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x})=4x\underline{i}+y\underline{j}-16(x^2+y^2)\underline{k}$ attraverso la superficie S

Problema 4 (7–17.5) Si calcoli la serie di Fourier della funzione periodica $F(x)$ che nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ è data da $f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le\pi\\ x & -\pi\le x\le 0\end{cases}$

Si dica se negli intervalli $(-\pi,0)$ e $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ la convergenza è uniforme.

Problema 5 (7–17.5) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x+\sin 2x & 0<x<\pi\\ u(x,0)=\sin x,\quad u_t(x,0)=\sin 2x,\quad u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$$

$2^{\underline{o}}$ Esonero e $1^{\underline{o}}$ Recupero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti)
Ingegneria Elettronica; 2–12–06 Compito B

Gli studenti che sostengono il secondo esonero svolgano solamente gli esercizi 4) e 5).

Problema 1 (7) Sia V la porzione di spazio interna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$ e compresa fra le due superfici $z=2x+y$ e $z=1+4x^2+y^2$. Si calcoli il volume di V.

Problema 2 (7) Si calcoli l'area della superficie laterale S contornante V.

Problema 3 (7) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x\underline{i} + 4y\underline{j} - 16(x^2+y^2)\underline{k}$ attraverso la superficie S

Problema 4 (7–17.5) Si calcoli la serie di Fourier della funzione periodica $F(x)$ che nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ è data da $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le \pi \\ -x & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$
Si dica se negli intervalli $(-\pi, 0)$ e $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la convergenza è uniforme.

Problema 5 (7–17.5) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin x - \sin 2x \quad 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \sin 2x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$2^{\underline{o}}$ Esonero e $1^{\underline{o}}$ Recupero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti)
Ingegneria Elettronica; 2–12–06 Compito C

Gli studenti che sostengono il secondo esonero svolgano solamente gli esercizi 4) e 5).

Problema 1 (7) Sia V la porzione di spazio interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e compresa fra le due superfici $z = 2x + 2y$ e $z = 3 + x^2 + y^2$. Si calcoli il volume di V.

Problema 2 (7) Si calcoli l'area della superficie laterale S contornante V.

Problema 3 (7) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x\underline{i} + y\underline{j} - 4(x^2 + y^2)\underline{k}$ attraverso la superficie S

Problema 4 (7–17.5) Si calcoli la serie di Fourier della funzione periodica $F(x)$ che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è data da $f(x) = \begin{cases} \cos x - 1 & 0 \le x \le \pi \\ 0 & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$

Si dica se negli intervalli $(-\pi, 0]$ e $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la convergenza è uniforme.

Problema 5 (7–17.5) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin x + \sin 2x \quad 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 3x, \quad u_t(x,0) = \sin 2x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$2^{\underline{o}}$ Esonero e $1^{\underline{o}}$ Recupero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti)
Ingegneria Elettronica; 2–12–06 Compito D

Gli studenti che sostengono il secondo esonero svolgano solamente gli esercizi 4) e 5).

Problema 1 (7) Sia V la porzione di spazio interna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$ e compresa fra le due superfici $z=x+y$ e $z=3+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}$. Si calcoli il volume di V.

Problema 2 (7) Si calcoli l'area della superficie laterale S contornante V.

Problema 3 (7) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = \frac{x}{4}\underline{i} + \frac{y}{4}\underline{j} - \frac{1}{4}(x^2+y^2)\underline{k}$ attraverso la superficie S

Problema 4 (7–17.5) Si calcoli la serie di Fourier della funzione periodica $F(x)$ che nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ è data da $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & 0\le x\le \pi \\ x & -\pi\le x\le 0 \end{cases}$

Si dica se negli intervalli $(0,\pi)$ e $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ la convergenza è uniforme.

Problema 5 (7–17.5) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx} = \sin x+\sin 2x \quad 0<x<\pi \\ u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=\sin 3x, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Soluzioni 2º Esonero e 1º Recupero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti) Ingegneria Elettronica; 2–12–06

Problema 1 Si parametrizza il volume nel seguente modo $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$, $z = u$ con $0 \le \rho \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$, $ax + by \le u \le h + cx^2 + dy^2$. Il piano ed il paraboloide non si toccano. L'integrale è $\displaystyle\int_0^1 d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} dt \int_{a\rho\cos t + b\rho \sin t}^{h + c\rho^2 \cos^2 t + d\rho^2 \sin^2 t} du = h\pi + \frac{\pi}{4}(c+d)$

Problema 2 Come prima cosa bisogna parametrizzare la superficie cilindrica e quindi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = u$ con $0 \le t \le 2\pi$, $ax + by \le u \le h + cx^2 + dy^2$. Questo è stato uno dei punti su cui ci sono stati più errori. È chiaro che sbagliare la superficie da parametrizzare provoca il quasi annullamento dell'esercizio. Il vettore esterno alla superficie cilindrica è quindi $\underline{n} = \cos t\underline{i} + \sin t\underline{j}$ ed il suo modulo è 1 per cui l'area di S è $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \int_{a\cos t + b \sin t}^{h + c\cos^2 t + d \sin^2 t} du = \pi(2h + c + d)$

Problema 3 Il campo vettoriale è della forma $\underline{F}(\underline{x}) = ex\underline{i} + fy\underline{j} + g(x^2 + y^2)\underline{k}$ e il flusso è dato dall'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \int_{a\cos t + b\sin t}^{h + c\cos^2 t + d\sin^2 t} du (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}) = \int_0^{2\pi} dt \int_{a\cos t + b\sin t}^{h + c\cos^2 t + d\sin^2 t} du (e\cos^2 t + f\sin^2 t) = \frac{\pi}{4}\Big(4eh + fc + ed + 4fh + fc + 3fd\Big)$. Si poteva certamente usare il teorema di Gauss ma: 1) la superficie che superiormente "chiude" S NON È UN PIANO ma il parabolide $z = h + cx^2 + dy^2$ 2) inferiormente S è chiusa dal piano $z = ax + by$ la cui normale esterna ha la terza componente è diretta verso il basso. Inoltre anche qui, calcolando direttamente il flusso, molti hanno sbagliato la superficie da parametrizzare.

Problema 4 In tutti i casi si aveva $f_1(x)$ per $-\pi \le x \le 0$ e $f_2(x)$ per $0 \le x \le \pi$ (uno dei dei uguali a zero era di troppo). Gli integrali da calcolare sono

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \doteq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f_1(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_2(x)\cos(kx)dx \text{ e}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin(kx)dx.$$

Compito A Si ottiene $a_0 = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2}$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ per $k \ne 1$, $a_{2k+1} = \frac{2}{\pi(2k+1)^2}$, se $k \ne 0$, $a_1 = \frac{2}{\pi}$ $a_{2k} = \frac{-2}{\pi(4k^2 - 1)}$

Nell'intervallo $(-\pi, 0)$ la convergenza non è uniforme in quanto se lo fosse, sarebbe uniforme anche la convergenza nell'intervallo $[-\pi, 0)$ e la somma della serie dovrebbe definire una funzione continua nell'intervallo $[-\pi, 0)$. Ma per il teorema di Dini, la somma della serie converge alla funzione nell'intervallo $(-\pi, 0)$ ed al valore $-\frac{\pi}{2}$ nel punto $x_0 = -\pi$ ossia ad una funzione discontinua.

Viceversa nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la convergenza è uniforme essendo la derivata della funzione una funzione continua in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Compito B Si ottiene $a_0 = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{2k} = \frac{-2}{\pi(4k^2 - 1)}$, $a_{2k+1} = \frac{-2}{\pi(2k+1)^2}$, $b_k = \frac{(-1)^k}{k}$, se $k \ne 1$,

Per la convergenza uniforme valgono le stesse considerazioni di prima. L'unica differenza è che nel punto $x = 0$ la derivata non è continua ma ciò non inficia la convergenza uniforme in quanto la derivata è continua a tratti.

Compito C Si ottiene $a_0 = -1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_1 = -\dfrac{2}{\pi}$, $a_k = 0$ se $k \neq 0,1$, $b_{2k} = \dfrac{4k}{\pi(4k^2-1)}$, $b_{2k+1} = \dfrac{-2}{\pi(2k+1)}$. Per la convergenza uniforme valgono le stesse considerazioni del compito A.

Compito D Si ha $a_0 = 1-\dfrac{\pi}{2}$, $a_1 = \dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{2}$, $a_k = \dfrac{1-(-1)^k}{\pi k^2}$, $b_1 = 1+\dfrac{2}{\pi}$, $b_{2k} = \dfrac{-1}{2k}-\dfrac{4k}{\pi(4k^2-1)}$, $b_{2k+1} = \dfrac{\pi+2}{\pi(2k+1)}$. Per la convergenza uniforme valgono le stesse considerazioni del compito B. Qui uno degli errori più sanzionati è stato quello di sbagliare il periodo della $F(x)$ che era 2π per tutte le funzioni. Si badi bene che indicare π quale periodo è sbagliato mentre indicare 4π quale periodo non è sbagliato. Infatti un funzione di periodo T ha anche periodo nT con n intero positivo qualsiasi. Naturalmente in questo secondo caso gli integrali vanno scritti di conseguenza ed alla fine si riducono agli integrali che si otterrebbero indicando T da subito quale periodo. Quasi tutti i compiti presentano errori di calcolo negli integrali stessi sui quali non ho calcato la mano. Non avere osservato che un denominatore proporzionale a $k-1$ comporta una "allerta" circa $k=1$ è stato ritenuto abbastanza grave (lo stesso per un denominatore proporzionale a k).

Problema 5

Compito A La formula risolutiva è $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k'' + a^2k^2u_k) = \sin x + \sin(2x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t) = 0$ se $k \neq 1,2$ e $f_k(t) = 1$ se $k = 1,2$. Se $k \neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt$ mentre se $k = 1$ la soluzione è $u_1(t) = A_1 \cos at + B_1 \sin at + \dfrac{1}{a^2}$ e $u_2(t) = A_2 \cos 2at + B_2 \sin 2at + \dfrac{1}{4a^2}$ se $k = 2$. La soluzione è quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin kx = (A_1 + \frac{1}{a^2})\sin x + (A_2 + \frac{1}{4a^2})\sin(2x) + \sum_{k=3}^{+\infty} \sin kx A_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x$. L'unica possibilità è che $A_1 = \dfrac{a^2-1}{a^2}$ e $A_2 = -\dfrac{1}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_2 = \dfrac{1}{2a}$. Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t) = \dfrac{a^2-1}{a^2}\sin x\cos at + \dfrac{1}{a^2}\sin x - \dfrac{1}{4a^2}\sin(2x)\cos(2at) + \dfrac{1}{4a^2}\sin(2x) + \dfrac{1}{2a}\sin(2x)\sin(2at)$. La soluzione si può scrivere come $u(x,t) = v(x,t) + \Big(\dfrac{1}{2a}\big(\sin(x+at)+\sin(x-at)\big) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} dz\sin 2z\Big)$ con $v(x,t) = \dfrac{1}{a^2}\sin x(1-\cos at) - \dfrac{1}{4a^2}\sin(2x)(1-\cos(2at))$ e $v(x,t)$ è la soluzione della equazione $\begin{cases} v_{tt} - a^2v_{xx} = \sin x + \sin 2x & 0 < x < \pi \\ v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{cases}$

Compito B La formula risolutiva è $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k'' + a^2k^2u_k) = \sin x - \sin(2x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$

dove $f_k(t) = 0$ se $k \neq 1,2$ e $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = -1$. Se $k \neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt$ mentre se $k = 1$ la soluzione è $u_1(t) = A_1 \cos at + B_1 \sin at + \frac{1}{a^2}$ e $u_2(t) = A_2 \cos 2at + B_2 \sin 2at - \frac{1}{4a^2}$ se $k = 2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0) \sin kx = (A_1 + \frac{1}{a^2}) \sin x + (A_2 - \frac{1}{4a^2}) \sin(2x) + \sum_{k=3}^{+\infty} \sin kx A_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x$. L'unica possibilità è che $A_1 = \frac{a^2-1}{a^2}$ e $A_2 = \frac{1}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_2 = \frac{1}{2a}$, Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è
$u(x,t) = \frac{a^2-1}{a^2} \sin x \cos at + \frac{1}{a^2} \sin x + \frac{1}{4a^2} \sin(2x)\cos(2at) - \frac{1}{4a^2} \sin(2x) + \frac{1}{2a} \sin(2x)\sin(2at)$.
Come prima la soluzione si può scrivere $u(x,t) = v(x,t) + \Big(\frac{1}{2a}\big(\sin(x+at) + \sin(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} dz \sin 2z\Big)$ con $v(x,t) = \frac{1}{a^2} \sin x(1 - \cos at) - \frac{1}{4a^2} \sin(2x)(\cos(2at) - 1)$ e $v(x,t)$ è la soluzione della equazione $\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = \sin x - \sin 2x & 0 < x < \pi \\ v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, & v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{cases}$

Compito C La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k'' + a^2k^2u_k) = \sin x + \sin(2x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin kx$ dove $f_k(t) = 0$ se $k \neq 1,2$ e $f_k(t) = 1$ se $k = 1,2$. Se $k \neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt$ mentre se $k = 1$ la soluzione è $u_1(t) = A_1 \cos at + B_1 \sin at + \frac{1}{a^2}$ e $u_2(t) = A_2 \cos 2at + B_2 \sin 2at + \frac{1}{4a^2}$ se $k = 2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0) \sin kx = (A_1 + \frac{1}{a^2}) \sin x + (A_2 + \frac{1}{4a^2}) \sin(2x) + \sum_{k=3}^{+\infty} \sin kx A_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin 3x$. L'unica possibilità è che $A_1 = \frac{-1}{a^2}$, $A_2 = -\frac{1}{4a^2}$ e $A_3 = 1$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_2 = \frac{1}{2a}$, Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t) = \frac{-1}{a^2} \sin x \cos at + \frac{1}{a^2} \sin x - \frac{1}{4a^2} \sin(2x)\cos(2at) + \frac{1}{4a^2} \sin(2x) + \frac{1}{2a} \sin(2x)\sin(2at) + \sin(3x)\cos(3at)$. Su come scrivere in modo più compatto la soluzione si vedano i compiti A e B.

Compito D La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k'' + a^2k^2u_k) = \sin x + \sin(2x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin kx$ dove $f_k(t) = 0$ se $k \neq 1,2$ e $f_k(t) = 1$ se $k = 1,2$. Se $k \neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt$ mentre se $k = 1$ la soluzione è $u_1(t) = A_1 \cos at + B_1 \sin at + \frac{1}{a^2}$ e

$u_2(t) = A_2\cos 2at + B_2\sin 2at + \frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin kx = (A_1 + \frac{1}{a^2})\sin x + (A_2 + \frac{1}{4a^2})\sin(2x) + \sum_{k=3}^{+\infty}\sin kx A_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x$. L'unica possibilità è che $A_1 = \frac{a^2-1}{a^2}$ e $A_2 = -\frac{1}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_3 = \frac{1}{3a}$. Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t) = \frac{a^2-1}{a^2}\sin x\cos at + \frac{1}{a^2}\sin x - \frac{1}{4a^2}\sin(2x)\cos(2at) + \frac{1}{4a^2}\sin(2x) + \frac{1}{2a}\sin(2x)\sin(2at) + \frac{1}{3a}\sin(3x)\sin(3at$. Su come scrivere in modo più compatto la soluzione si vedano i compiti A e B.

In questo si sono riscontrati molti errori quasi tutti gravi. C'è chi cerca di risolvere l'equazione $u_k'' + a^2k^2u_k = \sin x \pm \sin 2x$ senza accorgersi che la u_k è funzione del tempo. C'è chi non riesce a trovare i coefficinti di Fourier della funzione $\sin x + \sin 2x$ e non si accorge che la funzione è già sviluppata in serie di Fourier con: $b_1 = b_2 = 1$, $b_k = 0$ se $k \neq 1,2$. C´è chi non riesce a trovare una soluzione particolare della equazione $u_1'' + a^2u_1 = 1$ oppure $u_2'' + 4a^2u_2 = 1$. C'è chi trova tutti i coefficienti A_k e B_k ma quando va a riscrivere la funzione $u(x,t)$ da fondo a tutta la propria fantasia e inventa formule che nulla hanno a che vedere con il risultato.